Praksiser i

Ambisiøs Matematikkundervisning

Forfatter:

Svein H. Torkildsen

Publisert dato: Juni 2020

MATEMATIKKSENTERET

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Innhold

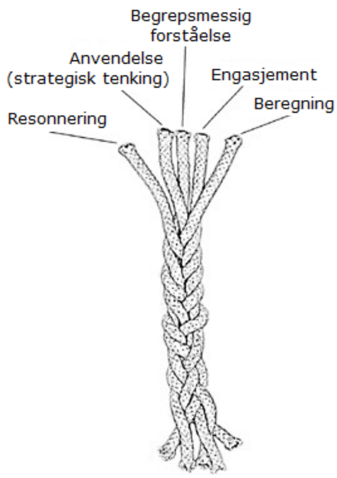
Ambisiøs matematikkundervisning

Målet med matematikkundervisningen i skolen er å utvikle elevenes forståelse og engasjement, samt deres evne til å beregne, anvende og resonnere.

En matematikkundervisning som retter seg mot disse ambisiøse målene for elevenes læring, kaller vi for ambisiøs matematikkundervisning.

Ambisiøs undervisning bygger på noen sentrale prinsipper for lærerens arbeid, og disse må sees i sammenheng med hverandre:

1) Matematikk som gir mening
2) Deltakelse og likeverdig tilgang
3) Tydelige læringsmål
4) Kunnskap om elevene som lærende



Ambisiøs matematikkundervisning kjennetegnes også ved hjelp av noen bestemte praksiser.

Praksiser i Ambisiøs matematikkundervisning

Praksiser er komponenter ved undervisningen som lærerne bruker for å støtte elevenes læring, og består av strategier, rutiner og trekk som læreren bruker. Sentrale praksiser i ambisiøs matematikkundervisning er: Å presentere oppgaven. Å bruke matematiske representasjoner. Å legge til rette for matematiske samtaler. Å lede undervisningen fram mot læringsmålet.

Å presentere oppgaven

Samtale om viktige matematiske ideer eller strategier gir elevene mulighet for å utvikle forståelse i matematikk. Læreren må velge en oppgave som passer til målet for timen, og oppgaven må presenteres slik at elevene blir utfordret både sosialt og kognitivt (Liljedahl, 2016). Liljedahl anbefaler en muntlig presentasjon. I flere av oppgavene vi bruker i MAM faller det naturlig, for eksempel *Kvikkbilder*[1] og *Telle i kor*. Liljedahl anbefaler også muntlig presentasjon av

[1] Se for eksempel filmen «Introduksjon til aktiviteten Kvikkbilde». http://matematikksenteret.no/grunnskole/kompetanseutvikling/mam/

problemløsingsoppgaver, eventuelt sammen med en presentasjon av nøkkelopplysninger på tavla. Da starter elevene samtalen om oppgaven raskt, i stedet for å tolke en tekst individuelt[2].

> Under utvikling av ressursene til MAM-prosjektet ble problemet *Bestefars tiere* presentert muntlig på denne måten: «Det problemet dere skal prøve å løse i dag handler om en bestefar som hadde spart tiere, 65 stykker i alt. Han ville gi tierne til barnebarna sine. De små fikk tre tiere hver og de store fikk sju tiere hver. Da alle barnebarna hadde fått det de skulle ha, var det ingen tiere igjen! Nå skal dere prøve å finne ut av hvor mange barnebarn bestefar kan ha. Noen spørsmål til oppgaven?»

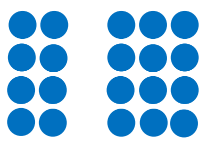
Lærerens fortelling gir elevene mulighet til å danne seg et bilde av hva som skjer. I denne oppgaven er det kun tre nøkkelopplysninger: 65 tiere, 7 tiere til de store og 3 til de små. Spørsmålet hun stiller til slutt gir elevene mulighet for å få gjengitt sentrale fakta og få forklaring på ukjente begrep. Noen elever ønsket å få repetert hvor mange tiere det var og hvor mange tiere de store og små skulle få. Etter en kort samtale i gruppene bekreftet så gruppene at de hadde situasjonen og problemet klart for seg. Gruppene brukte deretter et par minutter på å drøfte dette spørsmålet: Har dere noen ide om hvordan dere kan begynne arbeidet med å løse problemet? Dermed var samtalen i gang, og etter en kort erfaringsdeling startet problemløsingen. Om oppgaven består av en lengre fortelling med matematiske uttrykk, diagrammer eller mange, kan elevene også få tilbud om en skriftlig utgave. Den innledende fortellingen og samtalen om aktiviteten vil være til hjelp for elever som strever med lesingen. Ofte er skriftlig utgave unødvendig etter den muntlige presentasjonen og sentrale opplysninger på tavla.

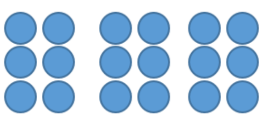
Å bruke matematiske representasjoner

Matematikken er abstrakt av natur. Vi har kun tilgang til matematiske ideer gjennom representasjoner. Matematikk kan uttrykkes med konkreter, visuelt i form av tegninger og diagrammer, symbolsk, verbalt og som beskrivelse av en situasjoner fra virkeligheten. Ulike representasjoner bidrar til elevenes begrepsforståelse, kommunikasjon og problemløsing. Læreren kan benytte seg av tre strategier for å inspirere og veilede elevene til aktiv bruk av representasjoner:

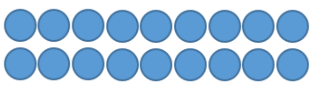
1. Oppmuntre elevene til bevisst bruk av representasjoner.
2. Engasjere elevene i diskusjoner om sammenhenger mellom representasjoner.
3. Oversette begge veier mellom ulike representasjoner.
   (NCTM, 2014)

Aktiviteten *Kvikkbilde* tar utgangspunkt i en visuell representasjon.

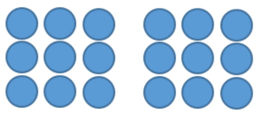
> Læreren Jørn Ove bruker et bilde med prikker som utgangspunkt for en matematisk samtale i klassen. Elevene blir bedt om å beskrive hvordan de ser bildet, og de like måtene å se bildet på ble representert symbolsk på tavla. Se flere detaljer under praksisen *Å lede undervisningen fram mot læringsmålet*.
>
> 
>
> Etter samtalen om dette bildet, gir Jørn Ove elevene hver sin White Board og ber dem tegne 18 prikker slik at de blir lette å telle. Elevene representerer 18 på ulike måter. Tre eksempler blir løftet fram i diskusjonen:



Ebbe



Fredrik



Marie

[2] Fra Peter Liljedahls foredrag på Novemberkonferansen 2019: *Building Thinking Classrooms*.

> Elevene kommer med sine tanker om hvordan hver av disse tre har tenkt. Den verbale representasjonen blir skrevet symbolsk og eleven som laget bildet må svare på om det var slik det var tenkt. Maries bilde ble representert både som $9 \cdot 2$, $6 \cdot 3$ og $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3$.

I eksemplet startet Jørn Ove timen med å la elevene diskutere et kvikkbilde han hadde laget. I fortsettelsen ba Jørn Ove elevene ta utgangspunkt i 18 prikker, finne en måte å gruppere prikkene på og deretter lage en visuell representasjon av denne grupperingen. I tillegg til at de 18 prikkene ble representert visuelt, verbalt og symbolsk, ble elevene utfordret på å gå fra det visuelle via det verbale til det symbolske og motsatt vei. Samtidig fikk elevene erfare at det er mange måter å gruppere størrelser på. I denne undervisningsøkta har Jørn Ove benyttet seg av alle de tre strategiene for å inspirere elevene til å bruke visuelle representasjoner.

Å legge til rette for matematiske samtaler

Samtalen har en sentral plass i ambisiøs matematikkundervisning. Læreren bør planlegge for samtaler i hel klasse, i grupper og mellom læringspartnere (Chapin et al., 2009). I ambisiøs matematikkundervisning bruker man målrettede spørsmål for å vurdere og fremme elevenes resonnering og forståelse av viktige matematiske ideer og sammenhenger. Spørsmålene læreren åpner samtalen med er avgjørende for å ivareta prinsippet om at læreren tar utgangspunkt i og engasjerer seg i elevenes tenking. Det forutsetter at læreren får fram hva elevene tenker. Måten læreren stiller spørsmål på kan være avgjørende for om elevene vil dele sine tanker. I stedet for å stille spørsmål der svaret er enten rett eller galt kan man stille spørsmål som:

1. Hva så du/dere? Hva har du/dere funnet ut?
2. Så noen av dere noe annet? Har noen funnet ut noe annet?
3. Hvordan så du/dere det? Hvordan fant du/dere det?
4. Så noen av dere det på en annen måte? Fant noen av dere det på en annen måte?

Formuleringene må tilpasses oppgaven elevene arbeider med. Læreren bruker de to første spørsmålene for å få fram elevenes tenking og responderer kun med oppklarende spørsmål for å forsikre seg om at hun har forstått hva elevene tenker. De to siste spørsmålene bruker læreren for å få bedre innblikk i elevenes resonnering (Ghousseini et. al., 2015). Etter at læreren har fått fram elevenes strategier kan hun utfordre dem på å beskrive likheter og forskjeller mellom strategiene og begrunne sammenhenger de ser. Under denne klassediskusjonen kan læreren benytte seg av sju samtaletrekk: gjenta, repetere, resonnere, tilføye, vente, snu og snakk og endre[3]. Denne type diskusjoner kan bidra til å etablere et positivt affektivt klassemiljø ved at læreren behandler elevene med respekt, lytter til ideene deres og verdsetter deres faglige bidrag.

Et utdrag fra transkripsjon av filmen «Telle med 4 fra 5» viser hvordan læreren Morten Svorkmo la til rette for en matematisk samtale med en klasse på femte trinn. Klassen hadde lite erfaring med slike klassesamtaler. Aktiviteten *Telle i kor* gir rike muligheter for å få i gang klassesamtaler.

[3] Samtaletrekkene blir nærmere i artikkelen «Samtaletrekk – redskap i matematiske diskusjoner» https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/mam/artikler-og-fagtekster

Klassen teller i kor mens læreren skriver tallene rad for rad i en tabell med fem kolonner. Morten stopper først ved tallet 45 og har en kort samtale om hvilket tall som kommer to ruter lenger fram. De to øverste pilene med +20 blir tegnet inn når en elev observerer at økningen fra 13 til 33 er 20, og eleven tenker da at økningen fra 33 også blir 20. Den siste pilen med +20 blir lagt til under samtalen Morten legger opp til etter å ha stoppet på 89.

Morten: Vi stopper litt der. Er det noen som ser noen mønster her?
Prat sammen to og to. (Elevene snakker sammen i ca 40 sekunder).
Hva snakket dere om Hanna og Ronja? Så dere noe mønster?
Ronja: Det går sånn 20 og 20 nedover.
Morten: Her ja, her blir det 20 og 20 (peker på pilene i kolonne tre). Et det flere plasser?
Ronja: Det er på alle.
Morten: På alle? Mmm?
Ronja: Ja.

Hanne nikker bekreftende
Morten føyer til pilen fra 53 til 73.

5	9	13	+20	17	21
25	29	33	+20	37	41
45	49	53	+20	57	61
65	69	73		77	81
85	89				

Morten: Er det flere plasser enn det jeg har vist her nå? Hva tenker du David?
David: At det er.
Morten: Er det det? Kan du komme og vise meg. Er det flere plasser enn det jeg har vist nå?

David kommer til tavla og peker på at det er +20 i kolonne 5 også.
En kort diskusjon gjør det klart at det er slik i alle kolonnene.

Morten: I alle kolonnene blir det pluss 20. Hvorfor blir det det?
Prat sammen. Hvorfor blir det det? (Elevene snakker sammen to og to ca ett min).

Samtale mellom David og Vilmer.
Vilmer: Å jo, det er jo fordi vi plusser på fire hver gang. Og så er det fem på rekka.
David Fire gange fem, det blir jo tjue.
Vilmer: Ja. Da er egentlig det grunnen da.
David: Ja. Men hvordan skal vi forklare det?

Morten: Hva snakket dere om? Har dere noen forklaring på … vi ser jo at det blir tjue og tjue, men hvorfor i all verden blir det det?

Gruppen Morten først henvender seg til, vet ikke hvorfor.
Registrerer bare at det er slik.

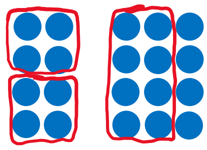
Morten: Dere aner ikke? Det er bare sånn det er. Er det noen som tror de har en forklaring? Aksel?
Aksel: Det er fire fem ganger, og hvis du ganger fire med fem, så blir det jo tjue.
Morten: Å jaaa … Akkurat. Du plusser fire fem ganger (Morten skriver piler og +5 på øverste rad og Aksel bekrefter)

Eksemplet viser hvordan en relativt enkel *Telle i kor* aktivitet gir elevene mulighet til å forklare hvilke mønstre de observerer og diskutere begrunnelser for at mønstre oppstår. Både individuell tenketid og tid til samtale med læringspartneren gir elevene noe å bidra med i klassesamtalen. I løpet av denne korte sekvensen ser vi at Morten orienterer elevene mot hverandre to og to, og elevparene blir invitert til å gi respons på og føye til noe på innspill andre elever kommer med. Det skiller klassesamtalen fra lærerens samtale med enkeltelever og bidrar til en felles forståelse av begrunnelsen for mønsteret.

Å lede undervisningen fram mot læringsmålet

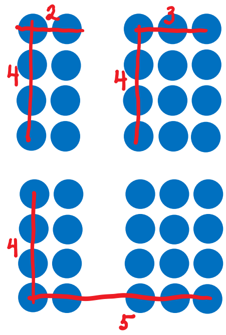
Et av prinsippene for ambisiøs matematikkundervisning er å ta utgangspunkt i tydelige læringsmål. Vi kan skille mellom brede matematiske mål som læreren bruker for å planlegge en undervisningsperiode, og spesifikke mål for en undervisningsøkt (NCTM, 2014). Når en klasse skal arbeide med multiplikasjon kan det brede målet for perioden være «Elevene skal kunne velge passende strategier for multiplikasjon av flersifrede tall». Det spesifikke målet for ei økt i denne perioden kan være «Elevene skal diskutere distributiv egenskap ved multiplikasjon». Tydelige undervisningsmål er nyttige både for læreren som må ta mange avgjørelser i løpet av økten, og for å rette elevenes oppmerksomhet mot matematikken de skal lære seg.

Målet med samtalen om bildet Jørn Ove bruker, er å løfte fram den distributive egenskapen ved multiplikasjon. Elevene ser bildet på flere måter [4]. Gina ser to firere til venstre i bildet. Det ble åtte. Så var det en åtter til og så en firer. Det blir 20 i alt. Læreren skriver $8 + 8 + 4$ på tavla.



Marie ser to rader med fire prikker til venstre og tre rader med fire prikker til høyre. Det blir skrevet som $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$. Læreren setter til parenteser for å vise «hva som hører sammen»: $(2 \cdot 4) + (3 \cdot 4)$. Jenny ser bildet omtrent på samme måte som Gina, men hun deler den siste fireren i to toere som blir lagt til hver sin åtter. Da får hun $10 + 10$. Nå er samtalen på vei bort fra målet for timen. Læreren bekrefter da Jennys måte å se bildet på, og retter så elevenes oppmerksomhet mot Maries måte å se bildet på.

Læreren spør Marie hvordan hun ser $2 \cdot 4$. Marie forklarer og læreren viser på tavla. Det samme blir gjentatt med $3 \cdot 4$.



Erle kommer nå på banen: Jeg tenker $5 \cdot 4$.
Lærer: Hvordan fant du ut 5 ganger 4?
Erle: Jeg telte de nederste først og så var det 4.
Læreren har nå fått fram det som skal til for å fremheve den distributive egenskapen ved multiplikasjon:
$(2 \cdot 4) + (3 \cdot 4) = (2 + 3) \cdot 4$, eller $(2 \cdot 4) + (3 \cdot 4) = 5 \cdot 4$.

Eksemplet viser at læreren kan få elevsvar som peker i ulike retninger når man stiller et åpent spørsmål. Når man har et tydelig faglig mål for timen, kan det være en utfordring å anerkjenne ulike måter å se problemet på samtidig som man løfter fram de innspillene som leder mot målet. Ved å dvele ved Maries innspill, $(2 \cdot 4) + (3 \cdot 4)$, kommer Erle på banen med sin måte å se bildet på: $5 \cdot 4$. Jørn Ove bruker dette innspillet for å rette elevenes oppmerksomhet mot den distributive egenskapen ved multiplikasjon.

Det fins ulike typer matematiske samtaler. Kazemi og Hintz (2019) skiller mellom seks typer samtale: 1) Åpen strategideling. 2) Sammenligne og knytte sammen. 3) Hvorfor? La oss begrunne. 4) Hva er best og hvorfor? 5) Definere og oppklare. 6) Utforske feil og endre.

En og samme undervisningsøkt kan inneholde mer enn en type samtale. Ideer som er kommet fram gjennom en åpen strategideling kan ofte være utgangspunkt for en samtale med et mer spesielt mål. I eksemplet med Jørn Oves samtale ser vi at han startet med en åpen strategideling. Deretter brukte han et par elevinnspill i en samtale av typen *Sammenlikne og knytte sammen*. Morten hadde en åpen utveksling av mønster elevene merket seg. Han brukte mønsteret «øker med 20 nedover» som utgangspunkt for en samtale av typen *Hvorfor? La oss begrunne*.

[4] Eksemplet er hentet fra transkripsjonen til filmen «Kvikkbilde $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$»: http://matematikksenteret.no/grunnskole/kompetanseutvikling/mam/

Prinsippene i praksis

De fire praksisene utgjør sentrale komponenter ved ambisiøs matematikkundervisning. Praksisene henger tett sammen, og læreren utfører ofte flere praksiser samtidig. Praksisene må utføres i tråd med prinsippene for ambisiøs matematikkundervisning, og de må ta utgangspunkt i og tilpasses elevenes tenking og ideer.

Referanser

Chapin, S. H., O'Connor, C., Anderson, N. C. (2009). *Classroom Discussions – Using Math Talk to Help Students Learn*. Math Solutions. Sausalito, California, USA.

Hala Ghousseini, Heather Beasley & Sarah Lord (2015). *Investigating the Potential of Guided Practice With an Enactment Tool for Supporting Adaptive Performance*, Journal of the Learning Sciences, 24:3, 461-497.

Kazemi, E., Hintz, A. (2019). *Målrettet samtale – Hvordan strukturere og lede gode matematiske diskusjoner*. Cappelen Damm, Oslo.

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem solving. In P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pekhonen (eds.) *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*. New York, NY: Springer. [ResearchGate, Academia]

NCTM (2014). *Principles to Action. Ensuring Mathematical Success for All*. www.nctm.org

National Research Council, 2002. *Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press, Washington DC.